MATEMÁTICA II – On line - 1^{er} PARCIAL
Curso 2008 - 28/06/08

TEMA 1 .

Geometría

1) Dadas las rectas "r" y "s" cuyas ecuaciones son: $r: \frac{x-3}{2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z-1}{4}$ y $s: \begin{cases} x = 5-2t \\ y = 1-3t \\ z = 7-4t \end{cases}$ **se pide:**

a) Analizar si "r" y "s" son o no paralelas. Justificar matemáticamente la respuesta.

La recta "r" tiene asociado un vector $\vec{u} = (2;3;4)$ que surge de su ecuación simétrica. En forma análoga, la recta "s" tiene asociado un vector $\vec{v} = (-2;-3;-4)$ logrado partir de su ecuación paramátrica. Como $\vec{u} = -1.\vec{v}$ resultan tener componentes proporcionales en consecuencia, "r" y "s" son paralelas.

b) Hallar la ecuación del plano "α" que es perpendicular a la recta "r" y además contiene al punto $A = (-5;2;4)$. Representar gráficamente el plano obtenido.

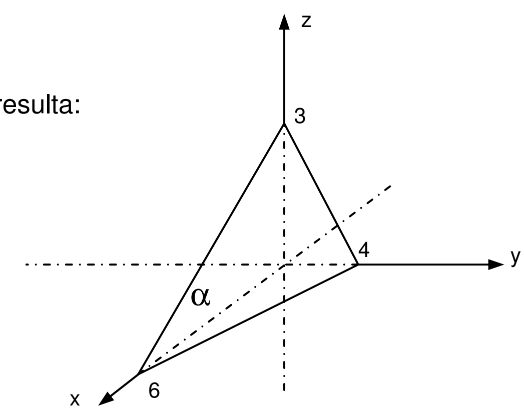
Como "α" es perpendicular a "r" los coeficientes de la recta los puedo utilizar para la ecuación del plano. Así resulta: $2x+3y+4z+d=0$. Aquí nos faltaría calcular el valor de "d". Como el enunciado indica que contiene a $A = (-5;2;4)$, este punto debe satisfacer la ecuación de "α". Así resulta:

$2.(-5)+3.(2)+4.(4)+d=0 \Rightarrow d=-12$.

Así tenemos que: $\alpha: \quad 2x+3y+4z-12=0$

Para graficarlo conviene expresarlo en forma segmentaria que resulta:

$2x+3y+4z-12=0 \Rightarrow 2x+3y+4z=12 \Rightarrow \frac{x}{6}+\frac{y}{4}+\frac{z}{3}=1$



c) ¿La recta "s" intercepta al plano "α" del ítem anterior? En caso afirmativo hallar las coordenadas del punto de intersección.

Si reemplazamos la ecuación de "s" en el plano "α" resulta:

$2.(5-2t)+3.(1-3t)+4.(7-4t)-12=0 \Rightarrow 10-4t+3-9t+28-16t=12 \Rightarrow 29=29.t$

De aquí podemos concluir que $t=1$. Reemplazando este valor en la ecuación de "s" tenemos:

$$\begin{cases} x = 5-2.1 = 3 \\ y = 1-3.1 = -2 \\ z = 7-4.1 = 3 \end{cases} \Rightarrow s \cap \alpha = \{(3;-2;3)\}$$

2) Dada la parábola de ecuación $x^2+4x=-4y$, se pide:

a) Hallar las coordenadas del vértice, las coordenadas del foco y la ecuación de la recta directriz. Representarla gráficamente en un sistema de ejes cartesianos.

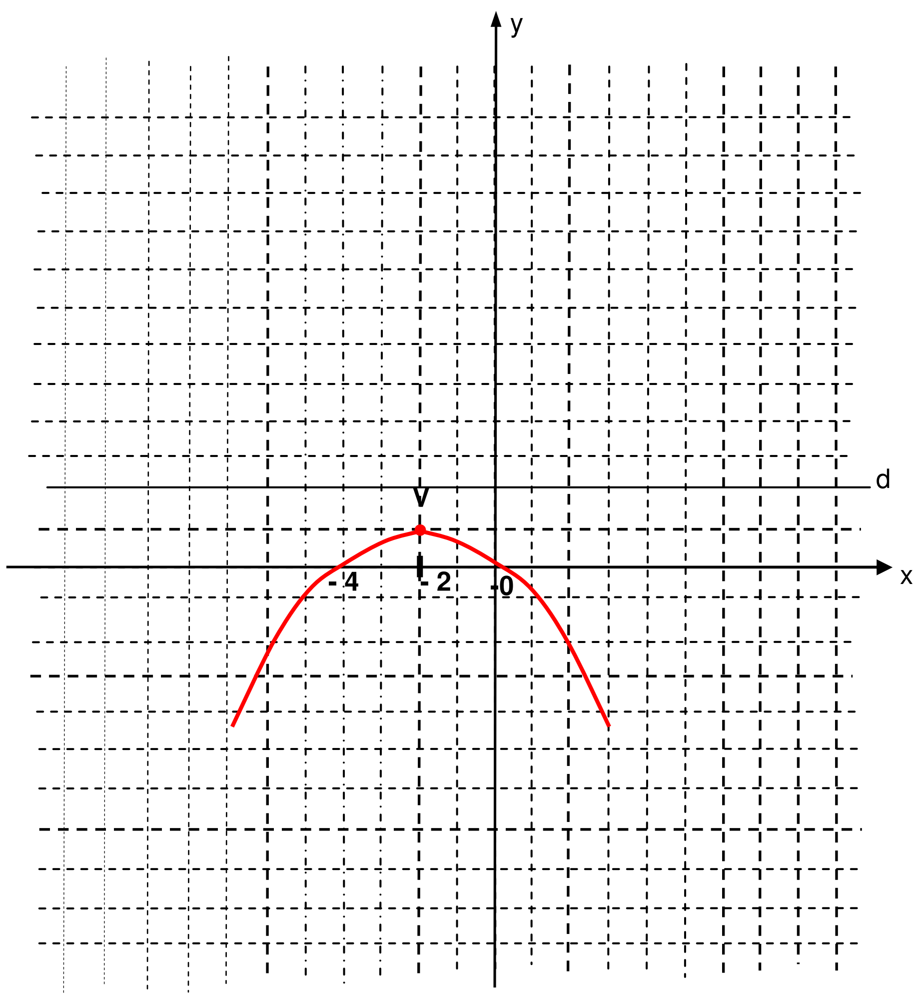
Como esta ecuación corresponde a una parábola de eje vertical y la misma es $(x-h)^2 = 2p.(y-k)$, vamos a completar cuadrados para llevarla a esa forma:

$x^2+4x=-4y \underset{\substack{\text{sumando} \\ \text{4 en ambos} \\ \text{miembros}}}{\Rightarrow} x^2+4x+4=-4y+4 \Rightarrow (x+2)^2=-4.(y-1)$

De ahí deducimos que las coordenadas del vértice $V=(h;k)=(-2;1)$

Como además $2p=-4 \Rightarrow p=-2 \Rightarrow \frac{p}{2}=-1$. Ello nos permite asegurar que el foco estará en el punto $F=\left(h;k+\frac{p}{2}\right)=(-2;0)$ y la directriz será la recta $y=2$

MATEMÁTICA II – On line - 1er PARCIAL
Curso 2008 - 28/06/08



b) Analizar, matemáticamente, si la parábola anterior intercepta a los ejes coordenados. En caso afirmativo hallar las coordenadas de dichos puntos de intersección.

Para calcular la intersección con el eje "x" debemos hacer nula la "y". Así resulta que:

$x^2 + 4x = -4y \quad \Rightarrow \quad x^2 + 4x = 0 \quad \Rightarrow \quad x.(x+4) = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 0 \quad ó \quad x = -4$

Para calcular la intersección con el eje "y" debemos hacer nula la "x". Así resulta que:

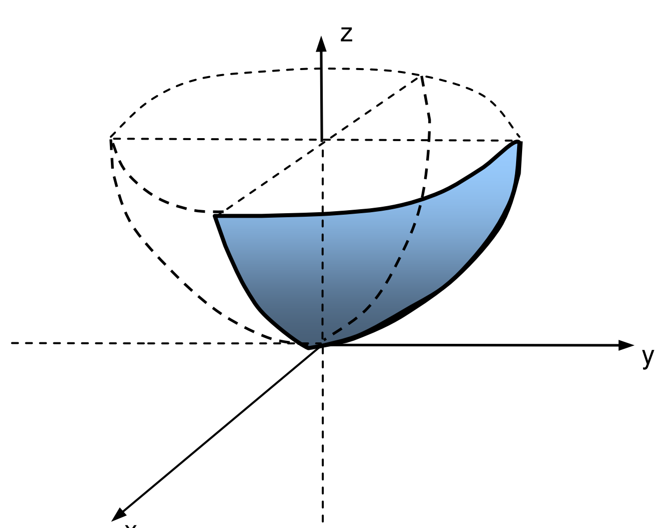
$x^2 + 4x = -4y \quad \Rightarrow \quad 0 = -4y \quad \Rightarrow \quad y = 0$

Lo calculado anteriormente se puede visualizar en la gráfica.

3) Dada la cuádrica, cuya ecuación es: $18x^2 + 50y^2 = 45z$ **se pide:**

a) Representarla gráficamente en tres dimensiones, mostrando su posición en el espacio y destacando en líneas llenas o punteadas, las zonas visibles y no visibles respectivamente.

La cuádrica representa un paraboloide elíptico de eje "z"



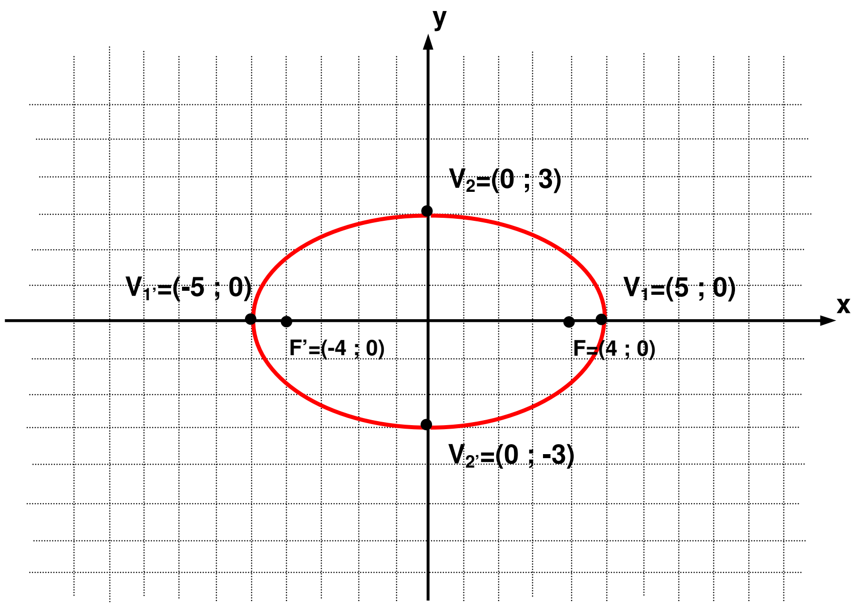
b) Calcular las coordenadas de los focos y graficar en dos dimensiones, la curva intersección con el plano de ecuación $z = 10$

Haciendo z=10 tenemos que $18x^2 + 50y^2 = 45z \quad \Rightarrow \quad 18x^2 + 50y^2 = 450$

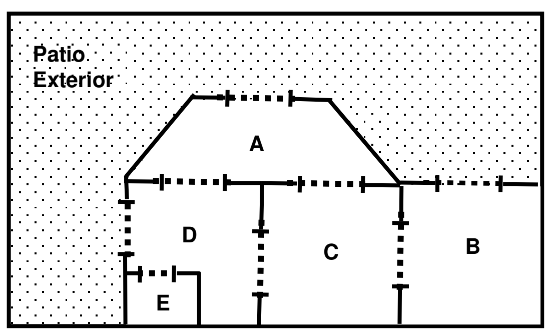
$\frac{18}{450}x^2 + \frac{50}{450}y^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$ **que es la ecuación de una elipse.**

Como en toda elipse se verifica que $a^2 = b^2 + c^2 \quad \Rightarrow \quad 25 = 9 + c^2 \quad \Rightarrow \quad c^2 = 16 \quad \Rightarrow \quad c = \pm 4$

Ello nos indica que los focos se encuentran en los puntos $F_1 = (4;0)$ y $F_2 = (-4;0)$



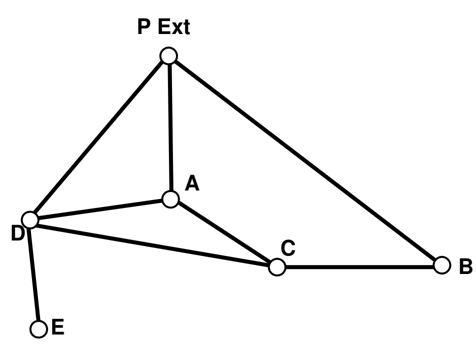
Grafos



4) El esquema en planta mostrado a la derecha, corresponde a un croquis de una galería de arte con 5 zonas claramente diferenciadas y tres salidas a un patio exterior. Las líneas punteadas indican las zonas que limitan cada uno de los ambientes. Se pide:

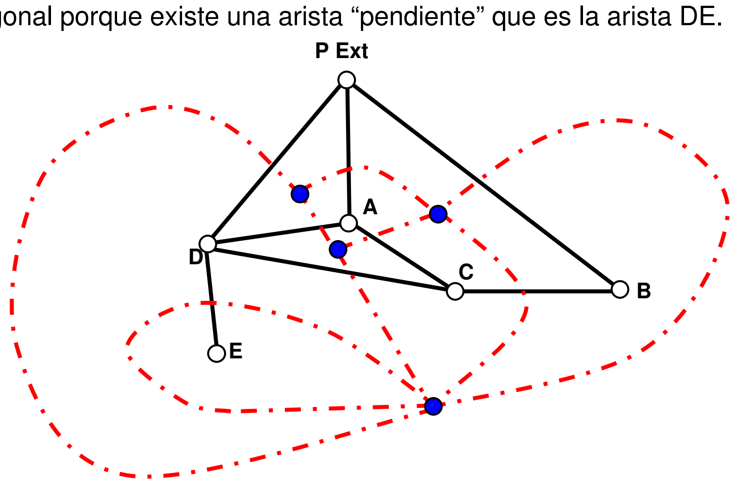
a) Confeccionar el grafo asociado a la estructura circulatoria y a partir de ello confeccionar la matriz de adyacencia de vértices.

	A	B	C	D	E	P
A	0	0	1	1	0	1
B	0	0	1	0	0	1
C	1	1	0	1	0	0
D	1	0	1	0	1	1
E	0	0	0	1	0	0
P	1	1	0	1	0	0



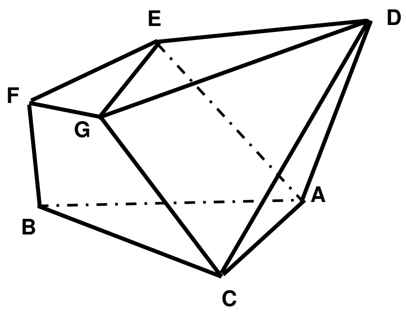
b) El grafo logrado anteriormente, ¿Es un grafo Poligonal? Justificar la respuesta. Confeccionar en línea punteada y otro color su grafo dual.

No, no es poligonal porque existe una arista “pendiente” que es la arista DE.



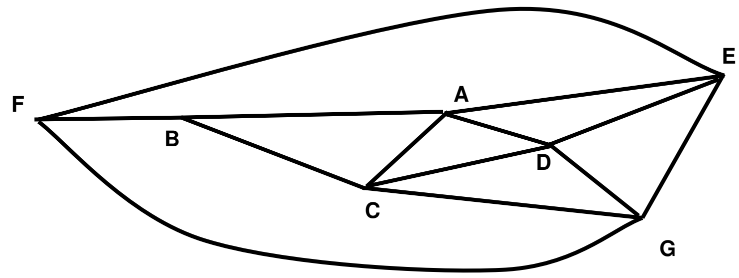
MATEMÁTICA II – On line - 1er PARCIAL
Curso 2008 - 28/06/08

5) Dado el siguiente poliedro se pide:



a) Construir su grafo plano asociado.
b) ¿Se cumple en él la fórmula de Euler? – Justificar.
c) ¿Admite recorridos eulerianos generales o restringidos? Justificar la respuesta.
d) Colorear <u>todas</u> las caras con la mínima cantidad de colores que permitan distinguirlas unas de otras.

a)



b) **Fórmula de Euler**
A=13
C=7+1
V=7

$$\underbrace{A+2}_{13+2} = \underbrace{C+V}_{8+7} \Rightarrow 15 = 15$$

c) Si, admite recorrido euleriano restringido porque tiene exactamente dos vértices de grado impar que son el “F” y el “B”.

d) Precisa tres colores